ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ & ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ

19ος Πανελλήνιος Διαγωνισμός Αστρονομίας και Διαστημικής 2014

4η φάση: «ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΣ»

Θεωρητική Εξέταση

Παρακαλούμε, διαβάστε προσεκτικά τα παρακάτω:

1. Ο διαθέσιμος χρόνος για την απάντηση των θεωρητικών προβλημάτων είναι 4 ώρες. Θα έχετε: 4 προβλήματα σύντομης ανάπτυξης (Προβλήματα 1 ως 4), 2 μεσαίας ανάπτυξης (Προβλήματα 5 και 6) και 2 μακράς ανάπτυξης (Προβλήματα 7 και 8).
2. Χρησιμοποιείστε μόνο μολύβια και στυλό χρώματος μαύρου ή μπλε.
3. **ΜΗΝ** χρησιμοποιήσετε το πίσω μέρος της κόλλας στην οποία απαντάτε τα προβλήματα.
4. Κάθε πρόβλημα να το απαντάτε σε ξεχωριστή κόλλα απαντήσεων.
5. Συμπληρώστε τα πλαίσια στο άνω μέρος κάθε κόλλας με τον κωδικό που σας δόθηκε, τον «αριθμό του προβλήματος» και τον συνολικό αριθμό των σελίδων που χρησιμοποιήσατε για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος.
6. Η αρχή και το τέλος του χρόνου της εξέτασης θα αναγγέλλεται.
7. Η τελική απάντηση σε κάθε ερώτηση πρέπει να συνοδεύεται από τις μονάδες της, οι οποίες πρέπει να είναι στο σύστημα SI ή στις μονάδες στις οποίες αναφέρεται το πρόβλημα. Αν η απάντηση δοθεί χωρίς μονάδες, ακόμη κι αν είναι σωστή, θα αφαιρεθεί ένα ποσοστό 20% από τη βαθμολογία που αναλογεί στην απάντηση.
8. Η απαιτούμενη αριθμητική ακρίβεια των απαντήσεων, εξαρτάται από το πλήθος των ψηφίων που δίνονται στα δεδομένα κάθε προβλήματος. Αν η απάντηση δοθεί χωρίς την απαιτούμενη από το πρόβλημα ακρίβεια, ακόμη κι αν είναι σωστή, θα αφαιρεθεί ένα ποσοστό 20% από την βαθμολογία που αναλογεί στην απάντηση. Χρησιμοποιείστε τις σταθερές ακριβώς όπως δίνονται στον πίνακα των σταθερών.
9. Στο τέλος της εξέτασης, <u>βάλτε όλα τα χαρτιά σας, ακόμη και τα πρόχειρα, μέσα στον φάκελο που σας δόθηκε</u>.

Πίνακας Σταθερών

(όλες οι μονάδες είναι στο σύστημα SI)

Σταθερά	Σύμβολο	Τιμή
Σταθερά της βαρύτητας	G	$6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
Σταθερά του Πλανκ	h	$6{,}63 \times 10^{-34}$ J s
Ταχύτητα του φωτός	c	$3{,}00 \times 10^{8}$ m s^{-1}
Μάζα του Ήλιου	$M_\odot$	$1{,}99 \times 10^{30}$ kg
Ακτίνα του Ήλιου	$R_\odot$	$6{,}96 \times 10^{8}$ m
Λαμπρότητα του Ήλιου	$L_\odot$	$3{,}83 \times 10^{26}$ w
Φαινόμενο μέγεθος Ήλιου	$m_\odot$	-26,8
Περίοδος περιστροφής Ήλιου		~27 ημέρες
Ηλιακή σταθερά	$b_\odot$	$1{,}37 \times 10^{3}$ w m^{-2}
Μάζα του Δία		$1{,}90 \times 10^{27}$ kg
Μάζα της Γης	$M_\oplus$	$5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Ακτίνα της Γης	$R_\oplus$	$6{,}38 \times 10^{6}$ m
Μέση πυκνότητα της Γης	$\rho_\oplus$	5×10^{3} kg m^{-3}
Επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της θάλασσας	g	9,81 m s^{-2}
Τροπικό έτος		365,24 ημέρες
Συνοδικό έτος		365,26 ημέρες
Συνοδική ημέρα		86164 s
Κλίση του ισημερινού ως προς την εκλειπτική	E	23^{o},5
Parsec	pc	$3{,}09 \times 10^{16}$ m
Έτος φωτός	ly	$9{,}46 \times 10^{15}$ m
Αστρονομική Μονάδα	AU	$1{,}50 \times 10^{11}$ m
Απόσταση Γης – Σελήνης		$3{,}84 \times 10^{8}$ m
Μάζα της Σελήνης	M_L	$7{,}34 \times 10^{22}$kg
Ακτίνα της Σελήνης	R_L	$1{,}74 \times 10^{6}$ m
Απόσταση Ήλιου από το κέντρο του Γαλαξία	R	8×10^{3} pc
Σταθερά του Hubble	H	75 km s^{-1} Mpc^{-1}
Μάζα του ηλεκτρονίου	m_e	$9{,}11 \times 10^{-31}$ kg
Μάζα του πρωτονίου	m_p	$1{,}67 \times 10^{-27}$ kg
Μάζα πυρήνα ηλίου (*Helium*)	m_{he}	$6{,}641 \times 10^{-27}$ kg
Λόγος περιφέρειας κύκλου προς τη διάμετρο	π	3,141

Σύντομης Ανάπτυξης Προβλήματα (4 μονάδες έκαστο)

Πρόβλημα 1ο:

1. Στο Πτολεμαϊκό Σύστημα οι πλανήτες κινούνται ομοιόμορφα γύρω από μικρούς κύκλους που λέγονται:

    Α) Διαφορικοί
    Β) Επίκυκλοι
    Γ) Έκκεντροι
    Δ) Ισημερινοί
    Ε) Κανονικοί

2. Η ικανότητα ενός οπτικού τηλεσκοπίου να διαχωρίζει δύο φωτεινά σημεία είναι αντιστρόφως ανάλογη της διαμέτρου του τηλεσκοπίου και ανάλογη:

    Α) του χρόνου παρατήρησης
    Β) του μήκους κύματος του φωτός
    Γ) της διάθλασης του φωτός
    Δ) της γωνίας προσπτώσεως του φωτός
    Ε) της εστιακής απόστασης του τηλεσκοπίου

3. Μια στήριξη τηλεσκοπίου, που επιτρέπει στον χειριστή να το στρέφει δεξιά ή αριστερά και πάνω ή κάτω, λέγεται:

    Α) Αλταζιμουθιακή
    Β) Συμβατική
    Γ) Dobsonian
    Δ) Πολική
    Ε) Ισημερινή

4. Η ατμόσφαιρα της Γης φαίνεται να αλλάζει χρώματα, εξ αιτίας

    Α) της φωτόσφαιρας του Ήλιου
    Β) του ηλιακού στέμματος
    Γ) του ηλιακού ανέμου
    Δ) της σκέδασης του φωτός
    Ε) των ηλιακών κηλίδων

5. Όπως είναι ορατός από τη Γη ο Ερμής, παραμένει πάνω από τον ορίζοντα είτε στην Ανατολή είτε στη Δύση του, το πολύ:

    Α) Μία ώρα
    Β) Δύο ώρες
    Γ) Τρεις ώρες
    Δ) Έξι ώρες
    Ε) Οκτώ ώρες

6. Τα νέφη της Αφροδίτης αποτελούνται, εκτός των άλλων και από σταγονίδια:

    Α) Αργού
    Β) Διοξειδίου του άνθρακα
    Γ) Αζώτου
    Δ) Θειικού οξέος
    Ε) Νερού

7. Η πρώτη ενέργεια, που ανιχνεύεται από την έκρηξη ενός υπερκαινοφανούς, φθάνει στη Γη με τη μορφή:

Α) Κοσμικών ακτίνων
Β) Νετρίνων
Γ) Ραδιοκυμάτων
Δ) Ορατού φωτός
Ε) Ακτίνων Χ

8. Η θεωρία περί των μελανών οπών προβλέπει ότι μια μελανή οπή περιέχει στο κέντρο της:

Α) Μια εργόσφαιρα
Β) Έναν ορίζοντα γεγονότων
Γ) Ένα κώνο εξόδου
Δ) Μια σφαίρα φωτονίων
Ε) Μια μοναδικότητα

9. Το νεφέλωμα απορρόφησης μπορεί να αποκληθεί και:

Α) Σκοτεινό νεφέλωμα
Β) Διάχυτο νεφέλωμα
Γ) Νεφέλωμα εκπομπής
Δ) Νεφέλωμα ανάκλασης
Ε) Αστρικό νεφέλωμα

10. Ένα άστρο, του οποίου το φάσμα και η λαμπρότητα μεταβάλλεται περιοδικά, λέγεται:

Α) Αστρομετρικά διπλό
Β) Οπτικά διπλό
Γ) Εκλειπτικά διπλό
Δ) Φασματοσκοπικά διπλό
Ε) Ορατά διπλό

Βαθμολογικό Σχήμα:
Από 0,4 μονάδες κάθε σωστή απάντηση

Πρόβλημα 2ο:

Εκτιμήστε τον αριθμό των αστέρων ενός σφαιρωτού σμήνους διαμέτρου 40 pc, εάν η ταχύτητα διαφυγής στις παρυφές του σμήνους είναι 6 km/s και η πλειονότητα των αστέρων του σμήνους είναι παρόμοιοι με τον Ήλιο μας.
Δίνονται: $M_{\odot}$ = 1,9891×10^{30} kg, G = 6,6726×10^{-11} S.I. και 1pc = 3,0856×10^{16} S.I.

Λύση:
Η ταχύτητα διαφυγής ενός αστέρα στις παρυφές του σμήνους δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2GM_C}{R_C}} \quad (1)$$

όπου M_C = συνολική μάζα του σμήνους και R_C = ακτίνα του σφαιρωτού σμήνους.
Αλλά $M_C = n \cdot M_{\odot} = \frac{R_C \upsilon^2}{2G}$, λόγω της (1) και όπου $M_{\odot}$ = μάζα Ήλιου και n το πλήθος των αστέρων του σμήνους.
Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι: $n = \frac{R_C \upsilon^2}{2GM_{\odot}} \simeq 8,4 \times 10^4$ αστέρες.

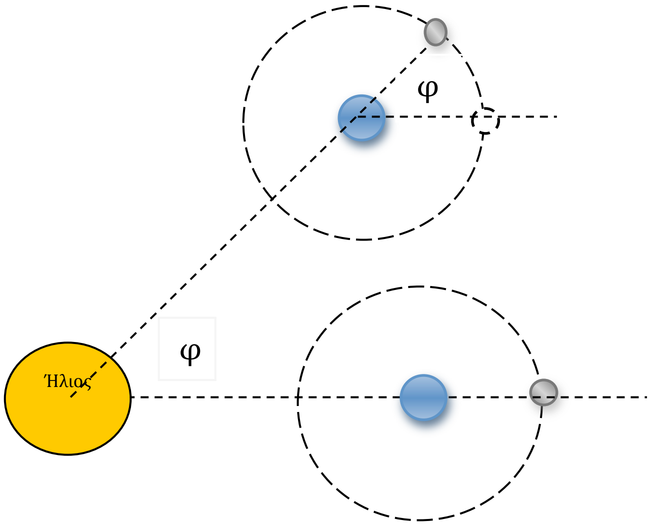
Βαθμολογικό Σχήμα:
Για τον τύπο (1): 1 μονάδα
Για τον τύπο του πλήθους (n = ...): 2 μονάδες
Σωστή αντικατάσταση και μονάδες: 1 μονάδα

Πρόβλημα 3ο:

Να υπολογίσετε την περίοδο περιστροφής της Σελήνης γύρω από τον άξονά της με τη βοήθεια των παρακάτω δεδομένων:

- Το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών Πανσελήνων: T = 29,5 ημέρες
- Η περίοδος περιφοράς της Γης γύρω από τον Ήλιο: $T_{\oplus} = 365$ ημέρες.
- Θεωρήστε κυκλικές τις τροχιές περιφοράς Γης και Σελήνης και ότι βρίσκονται περίπου στο ίδιο επίπεδο.

Λύση:



Έστω T = 29,5 ημέρες ο συνοδικός μήνας της Σελήνης (χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών Πανσελήνων).

Σε χρονικό διάστημα T η Γη έχει διαγράψει γωνία φ (rad), ενώ η Σελήνη έχει διαγράψει γωνία (βλέπε σχήμα):

$$\varphi_{\Sigma E \Lambda} = \varphi + 2\pi \qquad (1)$$

Ισχύει:

$$\varphi = \frac{2\pi}{T_{\oplus}} \cdot T \qquad (2)$$

όπου $T_{\oplus} = 365$ ημέρες (το αστρικό έτος της Γης),

$$\varphi_{\Sigma E \Lambda} = \frac{2\pi}{T_{\Sigma E \Lambda}} \cdot T \qquad (3)$$

όπου $T_{\Sigma E \Lambda}$ η περίοδος περιφοράς της Σελήνης γύρω από την Γη.

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (2), (3) στην (1) και επιλύουμε ως προς $T_{\Sigma E \Lambda}$, οπότε έχουμε:

$$T_{\Sigma E \Lambda} = 27{,}3 \text{ ημέρες}$$

Λόγω του «συγχρονισμού» της Σελήνης, η περίοδος περιστροφής της είναι ίδια με την περίοδο περιφοράς της γύρω από την Γη.

Συνεπώς:

$$T = 27{,}3 \text{ ημέρες}$$

Βαθμολογικό Σχήμα:
Για τον τύπο (1): 0,5 μονάδα
Για τον τύπο (2): 0,5 μονάδα
Για τον τύπο (3): 0,5 μονάδα

Αν βγάλει το $T_{ΣΕΛ}$, και με σωστές μονάδες, τότε 1,5 μονάδα.
Αν κάνει την τελευταία παρατήρηση για το ταυτόσημο περιστροφής/περιφοράς, τότε 1 μονάδα.

<u>Πρόβλημα 4ο</u>:

Ο αστέρας Rigel είναι ένας λαμπρός αστέρας στον αστερισμό του Ωρίωνα για τον οποίο γνωρίζουμε:

(α) ότι το φάσμα του παρουσιάζει μέγιστο στα 240 nm,
(β) η παράλλαξή του είναι 0.00378″ και
(γ) η ακτίνα του είναι 74 $R_\odot$.

Με βάση τα παραπάνω, να υπολογιστούν τα εξής χαρακτηριστικά του αστέρα:

(1) η απόστασή του,
(2) η επιφανειακή θερμοκρασία του,
(3) η φωτεινότητά του ως συνάρτηση της Ηλιακής φωτεινότητας,

Υποθέστε ότι ο Rigel εκπέμπει ως μέλαν σώμα.
Δίνεται ο νόμος των μετατοπίσεων του Wien: $\lambda_{\max} \cdot T = 0{,}0029 \cdot m \cdot {}^\circ K$

Λύση:

(1) Η απόσταση του Rigel υπολογίζεται από την παράλλαξή του: $d = \dfrac{1}{\pi} = 265 pc$ ή $\boldsymbol{d} = \mathbf{265\ pc}$

(2) Από το νόμο του Wien, υπολογίζεται η θερμοκρασία του:

$T = \dfrac{0{,}0029 \cdot m \cdot {}^\circ K}{2{,}4 \times 10^{-7} m} = 12080^\circ K$ ή $\boldsymbol{T} = \mathbf{12080\ {}^oK}$

(3) Από το νόμο των Stefan-Boltzmann υπολογίζεται η φωτεινότητά του:

$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \sim 10^5 L_\odot$ ή $\boldsymbol{L} \sim \mathbf{10^5 L_\odot}$

Βαθμολογικό Σχήμα:
Για το (1) ερώτημα: 1,5 μονάδα
Για το (2) ερώτημα: 1,5 μονάδα
Για το (3) ερώτημα: 1 μονάδα

Μεσαίας Ανάπτυξης Προβλήματα (7 μονάδες έκαστο)

<u>Πρόβλημα 5ο</u>:

(A) Ο ραδιοαστρονόμος κ. Ι.Σ. σκοπεύει να βγάλει τις προδιαγραφές κατασκευής ενός ραδιοτηλεσκοπίου που θα δουλεύει σε μήκος κύματος, λ = 1cm. Ποια θα πρέπει να είναι η διάμετρος του «κάτοπτρου» του ραδιοτηλεσκοπίου, ώστε αυτό να έχει την ίδια διακριτική ικανότητα με ένα οπτικό τηλεσκόπιο διαμέτρου D = 10 cm;
(B) Το βράδυ ο κ. Ι.Σ. παρατηρούσε την επιφάνεια της Σελήνης και το μάτι του έπεσε σε έναν κρατήρα, που έμαθε από έναν λεπτομερή χάρτη της Σελήνης, ότι αυτός ο κρατήρας έχει διάμετρο 80 km. Είναι πράγματι δυνατό να παρατήρησε ο κ. Ι.Σ. αυτό τον κρατήρα με γυμνό μάτι από την επιφάνεια της θάλασσας;
Υποθέστε ότι το μάτι μας έχει διάμετρο «φακού» 5 mm.
Δίνεται η απόσταση Γης – Σελήνης (κρατήρα), $d = 3{,}84 \times 10^8$ m και το μέσο μήκος κύματος οπτικής παρατήρησης, $\lambda_1 = 5 \times 10^{-7}$ m.

Λύση:
(A)
Η θεωρητική διακριτική ικανότητα $w_{\min}$, ενός «οργάνου» παρατήρησης εξαρτάται από το μήκος κύματος λ της παρατήρησης και τη διάμετρο D του αντικειμενικού φακού ή «κάτοπτρου» και δίνεται από τη σχέση:

$$w_{\min} = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$$

όπου η γωνία $w_{\min}$ μετριέται σε ακτίνια, τα δε λ, D στην ίδια μονάδα μήκους.
Έτσι, έχουμε για τα δύο όργανα παρατήρησης:

$$1{,}22\frac{\lambda_1}{D_1} = 1{,}22\frac{\lambda_2}{D_2} \Leftrightarrow D_2 = D_1\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Leftrightarrow D_2 = 0{,}1\cdot\frac{0{,}01}{5\times10^{-7}} \simeq 2km$$

(B)
Ας υποθέσουμε ότι η ελάχιστη απόσταση $x_{\min}$ μεταξύ δύο σημείων στη Σελήνη, «φαίνεται» υπό γωνία $\varphi_{\min}$ από το μάτι μας. Αυτή είναι η διακριτική ικανότητα του ματιού μας.
Έχουμε λοιπόν:

$$\varphi_{\min} = 1{,}22\frac{\lambda}{D_\mu}$$ (1), όπου D_μ = διάμετρος φακού ματιού.

Αλλά, γεωμετρικά: $\varphi_{\min} \simeq \frac{x_{\min}}{d}$ (2)

Από (1) και (2): $x_{\min} = 1{,}22\frac{\lambda}{D_\mu}\cdot d \simeq 46{,}8km$

Αφού, όμως, $x_{\min}$ < 80 km, σημαίνει ότι ο κρατήρας είναι ορατός με γυμνό μάτι και άρα ο κ. Ι.Σ. παρατήρησε πράγματι τον κρατήρα!

Βαθμολογικό Σχήμα
Για τον τύπο w_{min} = …, 1 μονάδα
Για το σωστό αποτέλεσμα του (Α), 2 μονάδες
Για τον τύπο (1), 1 μονάδα
Για τον τύπο (2), 1 μονάδα
Για το σωστό αποτέλεσμα, 2 μονάδες

<u>Πρόβλημα 6ο</u>:

Υποθέστε ότι ένας αστροναύτης ξεκινά να τρέχει εκτελώντας ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, στην επιφάνεια σφαιρικού ομογενούς αστεροειδή ακτίνας R και αμελητέας περιστροφής. Να υπολογίσετε το ελάχιστο μήκος της διαδρομής του, πριν «εγκαταλείψει» (απογειωθεί από) τον αστεροειδή.

Θεωρήστε γνωστά:

- την ακτίνα R του αστεροειδή
- τον συντελεστή οριακή τριβής $\mu_{ορ}$, μεταξύ του υλικού του αστεροειδή και του υλικού του πέλματος των υποδημάτων του αστροναύτη.
- <u>Σημείωση</u>: Στον αστροναύτη ασκείται συνέχεια η στατική τριβή καθώς αυτός τρέχει, την οποία και θεωρούμε σταθερή.

Λύση:

Από τους τύπους που ισχύουν στην ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση: $v = a \cdot t$ & $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$,

προκύπτει ότι: $v = \sqrt{2as}$ (1)

Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα: $\sum F =$ (τριβή στατική) = $m \cdot a$ (2)

Αφού ο αστροναύτης εγκαταλείπει τον αστεροειδή με την ελάχιστη ταχύτητα, στην συνέχεια θα κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από τον αστεροειδή με ταχύτητα:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \qquad (3)$$

Αυτή (ως γνωστό) είναι η ταχύτητα δορυφόρου σε μηδενικό ύψος.

Αντικαθιστούμε τη σχέση (2) στην (1), εξισώνουμε με την (3) και τελικά έχουμε για την στατική τριβή $T_{στ}$:

$$T_{στ} = \frac{G \cdot M \cdot m}{2R \cdot s}$$

Ξέρουμε όμως ότι ισχύει:

0 < τριβή στατική ≤ τριβή οριακή

Δηλαδή:

$$0 < \frac{G \cdot M \cdot m}{2R \cdot s} \le \mu_{ορ} \cdot m \cdot g_{as} \qquad (4)$$

όπου g_{as} είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια ρου αστεροειδή.

Δηλαδή:

$$g_{as} = \frac{G \cdot M}{R^2}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (4) και επιλύοντας ως προς s έχουμε:

$$s \ge \frac{R}{2\mu_{ορ}}$$

Άρα το ελάχιστο μήκος της διαδρομής είναι: $\frac{R}{2\mu_{ορ}}$

Βαθμολογικό Σχήμα
Για τον τύπο (1), 0,5 μονάδα
Για τον τύπο (2), 0,5 μονάδα
Για τον τύπο (3), 1 μονάδα
Για τον τύπο της στατικής τριβής, 1 μονάδα
Για τον τύπο (4), 2 μονάδες
Για την επίλυση ως προς s, 2 μονάδες

Πρόβλημα 7ο:

Ένας αστέρας της κύριας ακολουθίας, που βρίσκεται σε απόσταση 20pc, είναι μόλις ορατός διά μέσου ενός διαστημικού τηλεσκοπίου που είναι τοποθετημένο εκτός της ατμόσφαιρας της Γης και με το οποίο μπορούμε να καταγράψουμε όλα τα μήκη κύματος. Είναι γνωστό ότι ο αστέρας αυτός, με την πάροδο του χρόνου και καίγοντας το υδρογόνο και το ήλιο στο πυρήνα του, θα μετακινηθεί τελικά προς τα πάνω, στον κλάδο των γιγάντων. Τότε, η θερμοκρασία του θα μειωθεί κατά ένα παράγοντα 3, δηλ. θα υποτριπλασιαστεί και η ακτίνα του θα αυξηθεί κατά 100 φορές.

Ποια θα ήταν η νέα μέγιστη απόσταση στην οποία ο αστέρας θα ήταν μόλις ορατός, χρησιμοποιώντας το ίδιο τηλεσκόπιο;

Λύση

Για να παραμείνει η ίδια λαμπρότητα, η φωτεινή ροή του αστέρα πρέπει να παραμείνει η ίδια.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση «φωτεινότητας – ακτίνας – θερμοκρασίας», έχουμε:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

όπου T = η ενεργός θερμοκρασία του αστέρα και σ = σταθερά.

Άρα: $$\frac{L_G}{L_{MS}} = \frac{R_G T_G^4}{R_{MS} T_{MS}^4} \quad (1)$$

όπου: R_G, L_G, T_G = η ακτίνα, η λαμπρότητα και η θερμοκρασία του αστέρα αντίστοιχα, όταν περάσει στον κλάδο των γιγάντων και R_{MS}, L_{MS}, T_{MS} = η ακτίνα, η λαμπρότητα και η θερμοκρασία του αστέρα αντίστοιχα, όταν βρίσκεται στην κύρια ακολουθία.

Από την (1) με αντικατάσταση έχουμε:

$$\frac{L_G}{L_{MS}} = 100^2 (1/3)^4 \simeq 123{,}46 \quad (2)$$

Όμως: $F = \dfrac{L}{4\pi d^2}$ (όπου F = η φωτεινή ροή και d η απόσταση του άστρου από το τηλεσκόπιο).

Άρα: $\dfrac{F_G}{F_{MS}} = \dfrac{L_G}{L_{MS}} \cdot \left(\dfrac{d_{MS}}{d_G}\right)^2 = 1$, (αφού η φωτεινή ροή στη θέση του τηλεσκοπίου πρέπει να παραμείνει η ίδια).

Συνεπώς από τη (2) έχουμε: $d_G = \sqrt{\dfrac{L_G}{L_{MS}}} \cdot 20\,pc \simeq 222{,}22\,pc$

Δηλαδή, όταν ο αστέρας περάσει στον κλάδο των γιγάντων, θα μπορούσε να είναι μόλις ορατός από το ίδιο τηλεσκόπιο, αν βρισκότανε σε απόσταση 222,22 pc.

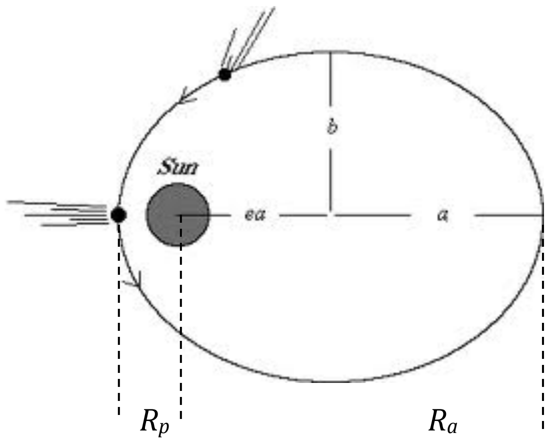
Βαθμολογικό Σχήμα
Για τον τύπο (1), 2 μονάδες
Για τον τύπο (2), 1 μονάδα
Για τον τύπο F = ..., 1 μονάδα
Για τον λόγο F_G/F_{MS} = ..., 1 μονάδα
Για τον τελικό τύπο ως προς d_G = ... και σωστό αποτέλεσμα, 2 μονάδες

Μακράς Ανάπτυξης Προβλήματα (13 μονάδες)

Πρόβλημα 8ο:

Ο κομήτης του Halley έχει περίοδο $T = 76$ χρόνια και εκκεντρότητα τροχιάς $e = 0{,}967$.
(Α) Να δείξετε ότι το περιήλιο της τροχιάς του βρίσκεται μεταξύ της τροχιάς της Αφροδίτης και της τροχιάς του Ερμή.
(Β) Αν η ταχύτητα του κομήτη στο περιήλιο της τροχιάς του είναι 54 km/s, να υπολογίσετε την ταχύτητά του στο αφήλιο της τροχιάς του.
(Γ) Να αποδείξετε τον τύπο $v^2 = GM_{\odot}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\alpha}\right)$ όπου v η ταχύτητα του κομήτη σε απόσταση r από τον Ήλιο και α ο μεγάλος ημιάξονας της ελλειπτικής τροχιάς του.
Θεωρήστε ότι όλες οι ελλειπτικές τροχιές της ίδιας περιόδου T έχουν την ίδια μηχανική ενέργεια.

Λύση:



(Α) Από τον 3ο νόμο του Kepler:
$T^2 = \alpha^3 \Rightarrow \alpha = 17{,}94\,AU$

Από τον ορισμό της εκκεντρότητας: $e = \frac{c}{\alpha} \Rightarrow c = e \cdot \alpha$

Στο περιήλιο της τροχιάς του ο κομήτης απέχει από τον Ήλιο απόσταση:
$R_p = \alpha - c = \alpha - e \cdot \alpha = (1-e)\alpha = (1-0{,}967) \cdot 17{,}94 = 0{,}033 \cdot 17{,}94 = 0{,}59\,AU$

Άρα: 0,4 AU < 0,59 AU < 0,7 AU
οπότε:

$$R_{\text{Ερμή}} < R_p < R_{\text{Αφροδίτης}}$$

(Β) Η τροχιακή στροφορμή L του κομήτη παραμένει σταθερή, επειδή η ροπή της ελκτικής δύναμης που ασκεί ο Ήλιος είναι μηδενική. Επομένως:

$$L_{\text{περιήλιο}} = L_{\text{αφήλιο}} = \text{σταθερή} \Rightarrow m \cdot v_p \cdot R_p = m \cdot v_a \cdot R_a \Rightarrow v_a = \frac{v_p \cdot R_p}{R_a} \quad (1)$$

όπου v_a η ταχύτητα στο αφήλιο.
Στο αφήλιο της τροχιάς του ο κομήτης απέχει από τον Ήλιο απόσταση:
$R_\alpha = \alpha + c = \alpha + e \cdot \alpha = (1+e)\alpha = (1+0{,}967) \cdot 17{,}94 = 1{,}967 \cdot 17{,}94 = 35{,}29\,AU$

Αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει:

$$v_\alpha = \frac{v_p \cdot R_p}{R_\alpha} = \frac{54 \cdot 0{,}59}{35{,}29} = 0{,}9\,km/s$$

(Γ) Ένα σώμα μάζας *m*, που κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας *R* γύρω από τον Ήλιο, έχει περίοδο:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_\odot}} \qquad (1)$$

και ολική ενέργεια:

$$E_1 = K + U = -\frac{G \cdot M_\odot \cdot m}{R} + \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Αντικαθιστώντας την ταχύτητα με:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_\odot}{R}} \quad \text{(ταχύτητα δορυφόρου)}$$

έχουμε:

$$E_1 = -\frac{G \cdot M_\odot \cdot m}{2R} \qquad (2)$$

Το ίδιο σώμα, όταν κινείται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τον Ήλιο (με μεγάλο ημιάξονα α) έχει περίοδο:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\alpha^3}{G \cdot M_\odot}} \qquad (3)$$

και ολική ενέργεια:

$$E_2 = K + U = -\frac{G \cdot M_\odot \cdot m}{r} + \frac{1}{2} m \cdot v^2 \qquad (4)$$

όπου r η απόστασή του από τον Ήλιο σε κάποια τυχαία θέση.
Η κυκλική τροχιά θεωρείται ελλειπτική τροχιά με εκκεντρότητα $e = 0$. Έτσι σύμφωνα με την εκφώνηση και με βάση τις (1) & (3) είναι:

$$T_1 = T_2 \rightarrow R = \alpha$$

Αντικαθιστώντας στην (2) και εξισώνοντας με την (4) έχουμε:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow -\frac{G \cdot M_\odot \cdot m}{2\alpha} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M_\odot \cdot m}{r} \Rightarrow v^2 = G \cdot M_\odot \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\alpha}\right)$$

Βαθμολογικό Σχήμα
(Α)
Για τον Νόμο του Κέπλερ, 0,5 μονάδα
Για τον τύπο της εκκεντρότητας, 0,5 μονάδα
Για την απόσταση στο περιήλιο και σωστό αποτέλεσμα, 1 μονάδες
(Β)
Για τον τύπο (1), 2 μονάδες
Για τον υπολογισμό στο αφήλιο, και σωστό αποτέλεσμα, 1 μονάδες
Για τον σωστό υπολογισμό της ταχύτητας, 1 μονάδα
(Γ)
Για τον τύπο (1), 1 μονάδα
Για τον τύπο (2), 2 μονάδες
Για τον τύπο (3), 1 μονάδα
Για τον τύπο (4), 1 μονάδα
Για τον τύπο της ταχύτητας, 2 μονάδες